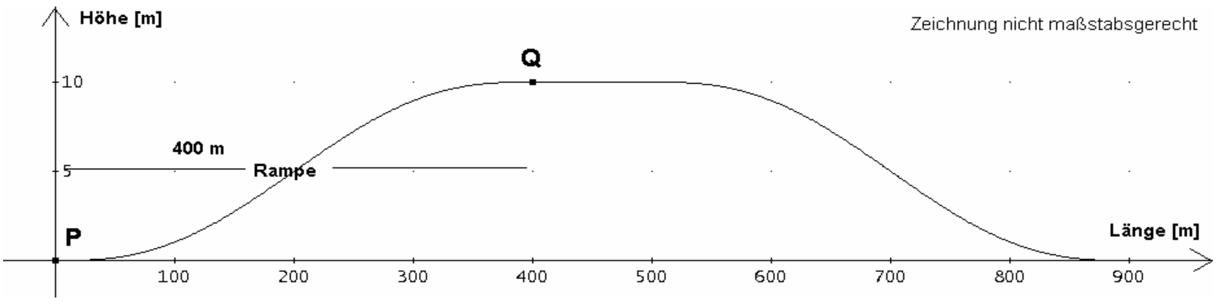
Aufgabe 2 Überführung

Aufgabe aus der schriftlichen Prüfung 2005.

Im flachen Friesland soll eine Bahnstrecke einen Kanal auf einer Brücke überqueren. Die Strecke auf der Brücke ist 100 m lang und verläuft ebenso horizontal wie die Strecken auf dem Boden. Die Strecke auf der Brücke liegt 10 m über dem Bodenniveau. Für den Übergang vom Boden auf die Brücke, die so genannte Rampe, haben die Bauplaner zunächst eine Rampenlänge $r = 400$ m in der Horizontalen vorgesehen. Die Steigungsstrecke links beginnt im Punkt P und endet im Punkt Q.



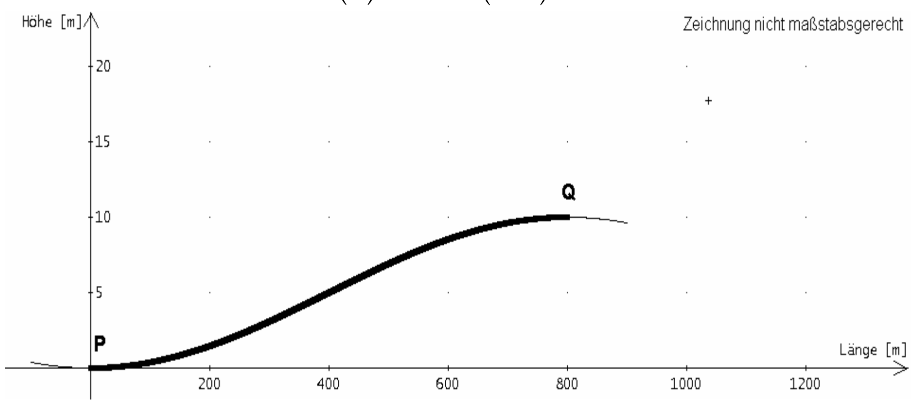
Ein Bahnexperte begutachtet die Planung und macht darauf aufmerksam, dass Eisenbahnstrecken eine maximale Steigung von 2,4 % aufweisen dürfen, damit die antreibenden Räder nicht rutschen.

a) Begründen Sie mit Argumenten aus der Anschauung, dass dieser Wert bei einer Rampenlänge von $r = 400$ m keinesfalls einzuhalten ist, unabhängig davon, wie die Rampentrasse geführt wird.

Die Rampenlänge r wird daraufhin in den weiteren Planungen auf **800 m** verlängert.

b) Ein Bauplaner vertritt die Idee, die Rampe darzustellen durch eine „getrimmte" Kosinusfunktion k vom Typ

$$k(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$$



- Ermitteln Sie die konkrete Funktionsgleichung für die Rampe.
- Bestimmen Sie die maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

Wieder meldet der Eisenbahnexperte Bedenken an: Er behauptet, dass an den Übergangspunkten P und Q bei schneller Fahrt ein Ruck durch den Zug gehen würde, weil „Krümmungssprünge“ vorlägen. Um das zu vermeiden, müssten deshalb die 1. und 2. Ableitung der aneinander stoßenden Trassen an den Übergangsstellen übereinstimmen.

c) Untersuchen Sie, weshalb bei dem Kosinus-Entwurf Krümmungssprünge auftreten.

d) Damit auch diese Bedenken des Eisenbahnexperten ausgeräumt werden können, soll nun die Rampe durch eine ganzrationale Funktion h dargestellt werden.

   Um deren Koeffizienten handhabbar zu machen, verkürzen Sie den Maßstab in x-Richtung um den Faktor 800. Wählen Sie also jetzt für die Punkte P und Q die Koordinaten $\boldsymbol{P(0 \mid 0)}$ und $\boldsymbol{Q(1 \mid 10)}$. Berechnete Steigungen sind dann um den Faktor 800 zu groß, sie müssen deshalb für die <u>tatsächliche</u> Trasse durch 800 geteilt werden.

   - Begründen Sie, dass die Funktion h mindestens den Grad 5 haben muss.
   - Untersuchen Sie, welche der Koeffizienten von h Null sein müssen.
   - Bestimmen Sie den Funktionsterm von h.
   - Bestimmen Sie die <u>tatsächliche</u> maximale Steigung dieser Rampe und interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Der Eisenbahnexperte ist nun zufrieden, aber den sparsamen Planern fällt auf, dass man die Rampe noch verkürzen könnte, ohne dass sie zu steil würde. Erläutern Sie einen mathematischen Weg, den man (bei Beibehaltung einer ganzrationalen Funktion 5. Grades) gehen könnte, um die minimal mögliche Rampenlänge r zu finden. Die Rechnungen sollen nicht ausgeführt werden.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Verbindung von P nach Q als <u>Strecke</u> hat die Steigung

$$m = \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{10}{400} = 2{,}5\,\% .$$

Der Anschauung entnimmt man, dass im Vergleich zur Strecke jede <u>gekrümmte</u> Rampenführung von P nach Q Stellen aufweisen muss, deren Steigung noch größer als 2,5 % ist. Der Maximalwert von 2,4 % auf der ganzen Rampenstrecke ist also keinesfalls einzuhalten.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Die Amplitude beträgt die Hälfte von 10 m, also $|a| = 5$.
Die Rampe beginnt mit dem Minimum, der Verlauf entspricht einer an der x-Achse gespiegelten Kosinusfunktion, also $a = -5$.
Die Mittellinie ist um 5 m nach oben verschoben, also $c = 5$.
Die halbe Periodenlänge beträgt 800 m, also muss in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b} = \frac{800}{\pi}$ gestreckt werden.
Man kann auch so argumentieren:
Dem x-Wert $b \cdot 800$ entspricht π, also $b \cdot 800 = \pi \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{800}$.
Als Ergebnis erhalten wir: $k(x) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) + 5.$
- Die Steigung wird durch die Ableitung von k dargestellt:

$$k'(x) = \frac{\pi}{160} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right).$$

Das Steigungsmaximum liegt aus Symmetriegründen „in der Mitte“ der Rampe bei der Wendestelle von k:

$$k'(400) = \frac{\pi}{160} = 0{,}0196... \approx 2\,\% .$$

Dies ist genügend niedrig, die Strecke ist an keiner Stelle zu steil.

Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet.

$k''(x) = \frac{\pi^2}{128000} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{800} \cdot x\right) = 0$ *führt im betrachteten Bereich zu x = 400.*

$k'''(400) = -\frac{\pi^3}{102400000} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{800} \cdot 400\right) < 0$*, also liegt hier ein Maximum vor.*</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Für die geraden horizontalen Streckenabschnitte ist die erste und die zweite Ableitung jeweils die konstante Funktion mit dem Funktionswert Null. Die Kosinusfunktion hat an ihren Extremstellen auch Extremstellen in der zweiten Ableitung, die Werte der zweiten Ableitung sind dort ganz bestimmt nicht Null.
Man kann auch konkret rechnen:
$$k''(x)=\frac{\pi^2}{128000}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{800}\cdot x\right)$$
$$k''(0)=\frac{\pi^2}{128000}\neq 0,\quad k''(800)=-\frac{\pi^2}{128000}\neq 0.$$
Der Eisenbahnexperte hat also mit seinen Bedenken Recht in Bezug auf die 2. Ableitung.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>• Die folgenden 6 Bedingungen sind zu beachten:
Punkt P: $h(0)=0$; $h'(0)=0$; $h''(0)=0$
Punkt Q: $h(1)=10$; $h'(1)=0$; $h''(1)=0$.
Das lässt sich nur mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades erreichen.
• Ansatz: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+f$.
Aus den Bedingungen für den Punkt P folgt: $d=e=f=0$.
• Es bleibt also: $h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3$
Aus den drei Bedingungen für Q erhält man das folgenden linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c:
$$\begin{aligned}a+b+c&=10\\5\cdot a+4\cdot b+3\cdot c&=0\\10\cdot a+6\cdot b+3\cdot c&=0\end{aligned}$$
Dieses Gleichungssystem hat die Lösung: $a=60$; $b=-150$; $c=100$.
Also gilt $h(x)=60\cdot x^5-150\cdot x^4+100\cdot x^3$.
(Das Lösen des LGS sollte bei der Bewertung nicht mehr als 15 Punkte umfassen. Die nicht erwartete maßstabsgerechte Funktionsgleichung lautet übrigens:
$$\hat{h}(x)=h\left(\frac{x}{800}\right)=\frac{3}{1{,}6384\cdot 10^{13}}\cdot x^5-\frac{3}{8{,}192\cdot 10^9}\cdot x^4+\frac{1}{5{,}12\cdot 10^6}\cdot x^3$$)
• Die Steigungen der Trasse werden durch die Ableitung von h ausgedrückt:
$$h'(x)=300\cdot x^4-600\cdot x^3+300\cdot x^2 .$$
Aus Symmetriegründen liegt das Maximum von h' (der Wendepunkt von h) in der Mitte der Rampe, also bei $x=\frac{1}{2}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man kann dieses Ergebnis natürlich auch mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung bestätigen, das wird aber nicht erwartet: $$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{75}{4}.$$ Indem wir die Maßstabsveränderung rückgängig machen, erhalten wir den tatsächlichen Maximalwert für die Steigung der Rampe $\frac{75}{4\cdot 800}\approx$ 2,34%. Dieser Wert ist noch zulässig.	10	25	
e)	Statt des konkreten Wertes von $r=1$ (in Wirklichkeit: $\hat{r}=800$) kann man eine Variable *r* (für die Rampenlänge) einführen. Dann argumentiert und rechnet man entweder genau wie in d) und erhält den Maximalwert für die Steigung als Funktion $max\, s(r)$ von *r*. Nun löst man die Gleichung: $$max\ s\left(r\right)=800\cdot 2{,}4\%.$$ Oder man kann auch direkt in das Gleichungssystem eine weitere Gleichung $h'\left(\frac{r}{2}\right)=800\cdot 0{,}024$ mit der weiteren Unbekannten *r* einführen und erhält dann die minimale Rampenlänge direkt als ein Element des Lösungsvektors. (*Zuatzinformation für Korrektoren: Beide Wege führen auf das Ergebnis* $r\approx 0{,}977$ bzw. $\left(\hat{r}\approx 781{,}25\right)$. *Die Rampe kann also nur unwesentlich um knapp 19 m verkürzt werden.*)			20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20