

Aufgabe 10 Luftvolumen der Lunge

Die Aufgabe basiert auf einer Beispielaufgabe in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen der KMK (EPA vom Mai 2002).

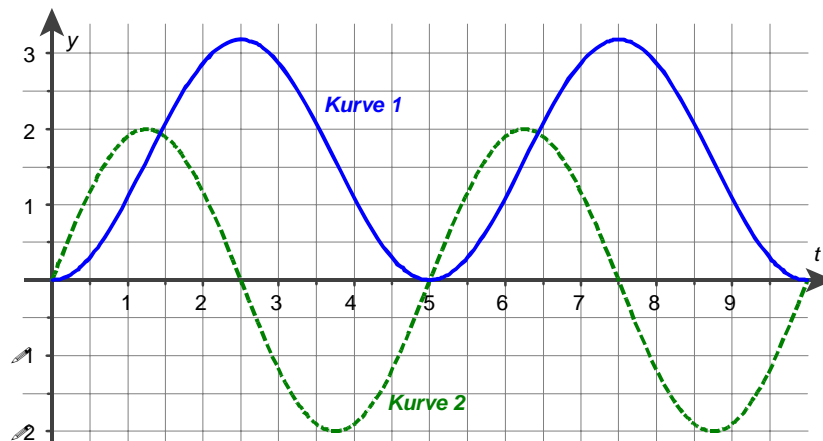
Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi \cdot t\right)$ modelliert werden (dabei ist t Zeit in Sekunden, $f(t)$ in Liter pro Sekunde angegeben).

Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

- a) Geben Sie die Bedeutung der Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ im Kontext der Aufgabe an.

Bestimmen Sie das Integral und damit $F(t)$.

- b) Das nachfolgende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.



Geben Sie an, welche der beiden Kurven den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge beschreibt. Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximalen Luftvolumens enthält.

- c) Bestimmen Sie das durchschnittliche Luftvolumen in der Lunge während des Zeitintervalls $[0;5]$.

- d) Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Erneut vereinfachend nehmen wir an, dass dieses minimale Luftvolumen in der Lunge konstant 0,8 Liter sei. Der Atemvorgang laufe ansonsten wie in Aufgabenteil b) ermittelt ab.

Beschreiben Sie die Änderungen, die sich in den Kurven 1 und 2 (siehe obige Abbildung) ergeben, und ermitteln Sie die zugehörigen Funktionsterme.

Skizzieren Sie den Verlauf der geänderten Kurven in einem Koordinatensystem.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Als Umkehrung der Differentialrechnung ist das Integral dann der Weg zurück zum „Bestand“, d.h. $F(t)$ beschreibt das Luftvolumen.</p> $2 \cdot \int_0^t \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right) dx = 2 \cdot \left[-\cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right) \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}\pi} \right]_0^t = \frac{5}{\pi} \cdot \left[-\cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right) \right]_0^t =$ $= \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right))$		15	15
b)	<p>Das Luftvolumen nimmt beim Einatmen zu und beim Ausatmen ab. Es kann jedoch nicht negativ werden, also kommt nur Kurve 1 in Frage. Die Kurve 2 beschreibt dazu die lokale Änderung, ist also die Ableitung der Kurve 1. Das Intervall $[0;5]$ beschreibt eine vollständige Periode. An der Stelle $t = 0$ ist nach Vereinbarung das Luftvolumen 0, also minimal, daher wegen der Periodizität auch bei $t = 5$. An der Stelle $t = 2,5$ hat f eine Nullstelle (von plus nach minus), daher hat F dort ein Maximum.</p> <p>Es ist $2 \cdot \int_0^{2,5} \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) dt = \frac{5}{\pi} \cdot (1 - \cos \pi) = \frac{5}{\pi} \cdot 2 = \frac{10}{\pi} \approx 3,2$.</p> <p>Das maximale Luftvolumen tritt im Modell nach 2,5 Sekunden ein und beträgt etwa 3,2 Liter.</p> <p>Das zum Zeitintervall $[0 ; 2,5]$ gehörende Kurvenstück von f ist symmetrisch zu $t = 1,25$. Die Lunge ist also 1,25 Sekunden nach Beginn des Einatmens halb gefüllt, was analog auch für $t = 3,75$ oder 1,25 Sekunden vor dem Ende des Ausatmens gilt.</p>	15	15	
c)	<p>Die Berechnung des mittleren Luftvolumens kann mittels Integrieren gelöst werden:</p> $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{\pi} \cdot \int_0^5 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right)\right) dx = \frac{1}{\pi} \cdot 5 - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot x\right) dx = \frac{5}{\pi} - 0 = \frac{5}{\pi} \approx 1,6$ <p>Das mittlere Luftvolumen beträgt also etwa 1,6 Liter.</p>		15	
d)	<p><u>Beschreiben der Änderungen:</u></p> <p>Kurve 1 verschiebt sich um 0,8 in y-Richtung und wird so gestaucht, dass das maximale Luftvolumen beim Wert $\frac{10}{\pi}$ aus Teilaufgabe b) bleibt.</p> <p>Kurve 2 wird ebenfalls gestaucht, weil der Bereich der Änderung verringert wurde.</p> <p><u>Ermitteln des neuen Terms zu Kurve 1:</u></p> <p>(1) Verschieben: Bisheriger Term $+ 0,8 = \frac{5}{\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right)\right) + 0,8$</p> <p>(2) Stauchen, sodass Maximum bleibt.</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$a \cdot \frac{5}{\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{5}{2}\right)\right) + 0,8 = \frac{10}{\pi} \Leftrightarrow a \cdot \frac{10}{\pi} = \frac{10}{\pi} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{2}{25}\pi.$ <p>Die geänderte Funktionsgleichung lautet daher</p> $F_2(t) = \left(\frac{5}{\pi} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right)\right) + 0,8.$ <p><u>Ermitteln des neuen Terms zu Kurve 2:</u></p> <p>Mit der Ableitung von F_2 erhält man $f_2(t) = \left(2 - \frac{4}{25}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right).$</p> <p><u>Graphische Darstellung:</u></p>	5	20	
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15